| 머리말 |

"어떻게 하면 수학을 잘 할 수 있나요?"

학생들로부터 가장 많이 받는 질문입니다.
수학 공부를 할 때 꼭 염두에 두어야 할 세 가지를 짚어보면서 질문에 답해 보겠습니다.

첫째, 수학은 **언어**입니다.
어느 낯선 문명의 말과 글을 듣고 볼 때 낯설고 어색하여 답답함을 느끼듯이 수학도 처음에는 어색하고 답답한 수식들의 세계처럼 느껴집니다.
이때 필요한 것은 **틀릴 것을 두려워하지 않는 용기**입니다.

수학에 등장하는 정의, 성질, 법칙들은 수학의 세계에서 통용되는 기본단어, 숙어, 관용구와도 같기 때문에 그대로 써 보고, 그대로 읽어 보고, 또 쓰고, 또 읽고, … 남에게 말 할 수 있을 때까지 해야 합니다.

둘째, 수학은 **문제풀이를 통해서 이해하는 학문**입니다.
한마디로 문제를 풀어 봐야 개념이 완벽해진다는 말입니다.
이때 필요한 것은 **인내심이며 충분한 시간**입니다.

처음에는 쉬운 문제부터 시작하기 바랍니다. 처음부터 지나치게 어려운 문제에 매달리다 보면 개념의 흐름을 놓치고 자꾸만 자괴감에 휩싸이게 됩니다. 문제를 풀고 나서 반드시 개념을 다시 읽고 써 보기 바랍니다.
즉, 확신이 생기고 자신감이 생길 때까지 해야 합니다.

셋째, 수학은 **시행착오를 거치면서 터득되는 학문**입니다.
개념에 대한 단편적인 이해를 넘어 그 적용 단계에 이르면 자신에게 숨어 있던 허점들이 나타나게 됩니다.
그 허점을 극복해 나가는 과정이 수학 실력이 느는 과정입니다.
이때 필요한 것은 **냉혹하고 집요한 반성**입니다.

반드시 자신의 풀이를 되돌아보고, 왜 틀렸는 지, 틀리지 않기 위해서는 무엇을 염두에 두어야 하는 지 꼼꼼하게 정리해 봐야 합니다. 자기가 틀린 이유를 설명할 수 있을 때까지 해야 합니다.

이 책을 통해서 수학을 접할 여러분을 그려봅니다.
공부하는 즐거움보다 점수가 주는 위압감이 더 앞서는 시대…
그러나 위의 세 가지 사항을 명심하고 나아간다면 여러분의 수학 실력은 나날이 발전해 갈 것이라고 확신합니다.
여러분 모두의 건투를 빕니다.

– 한석만 –

수학의 원리 미리보기

• 단원을 세분화하고 꼭 필요한 내용을 수록하였습니다.
• 고등학교 학생들이 반드시 알아야 할 개념들을 개정교육과정에 맞춰 사전식으로 정리하여 쉽게 이해할 수 있도록 구성하였습니다.

01 다항식의 연산

01

다음 식을 통해 다항식에서 사용하는 용어의 뜻을 알아보자.

$$2x^3+3x^2-4x+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(1) $2x^3$, $3x^2$, $-4x$, 1과 같이 몇 개의 문자 또는 수의 곱으로 이루어진 식을 **단항식**이라 하고, ㉠과 같이 단항식의 합으로 이루어진 식을 **다항식**이라 한다.

(2) 다항식을 이루고 있는 각각의 단항식을 이 다항식의 **항**이라 하고, 특히 상수로만 이루어진 항을 **상수항**이라 한다.

(3) 다항식의 각 항에서 문자가 곱해진 횟수를 그 **항의 차수**라 하고, 각 항의 차수 중 가장 높은 것을 **다항식의 차수**라 한다.

(4) 다항식의 각 항에서 문자를 제외한 나머지 부분을 그 **항의 계수**라 한다.

$2x^3+3x^2-4x+1$
상수항
일차항(계수 : -4)
이차항(계수 : 3)
삼차항(계수 : 2)

한편, 두 문자 x, y로 이루어진 다항식

$$3x^2y+xy^3-2x+4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

에서 $3x^2y$는 x가 두 번 곱해져 있고, y가 한 번 곱해져 있으므로 두 문자 x, y에 대한 삼차식이고, 문자 x, y를 제외한 숫자 3이 곱해져 있으므로 계수는 3이다.

그러나 $3x^2y$를 문자 x를 기준으로 분석하면

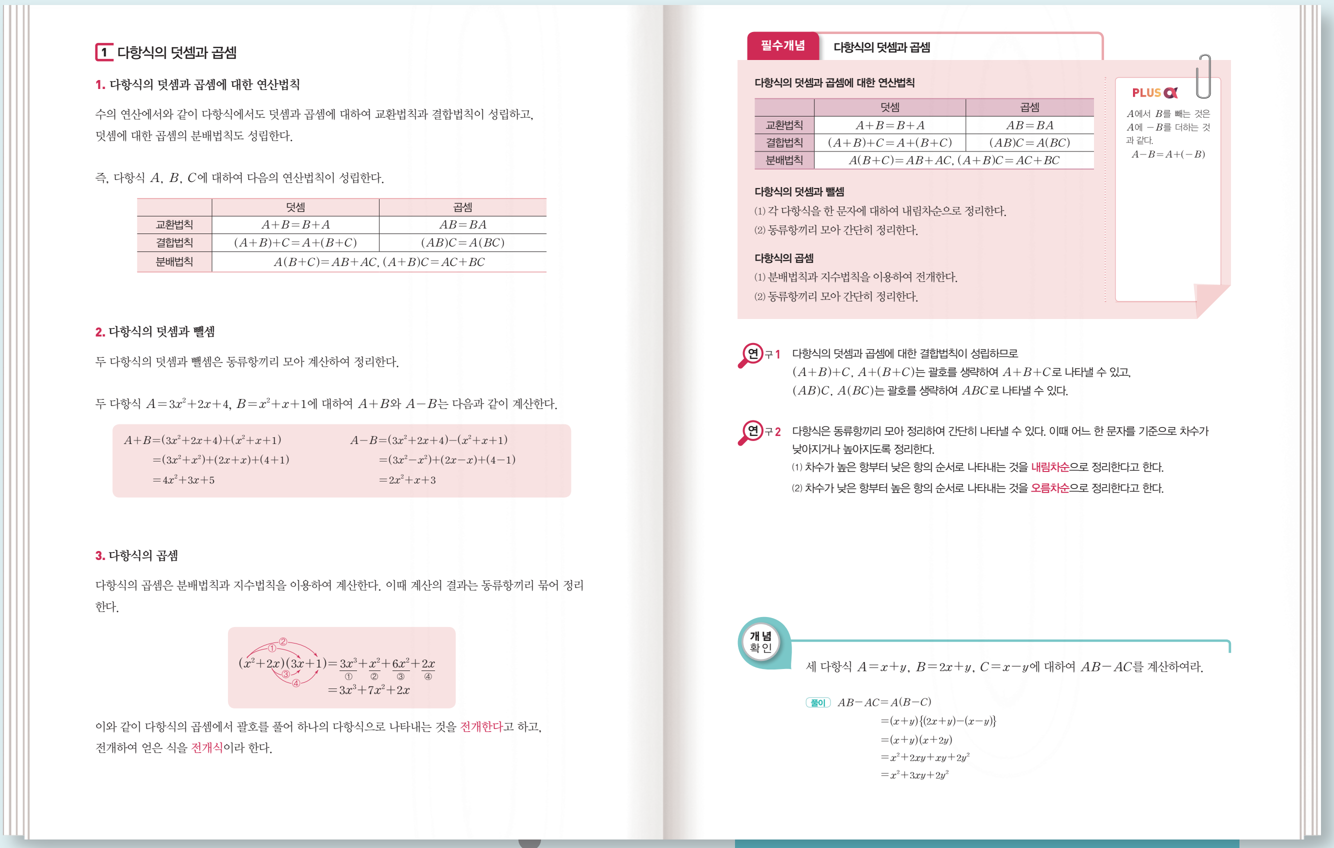
x에 대한 이차식이고, y는 상수로 취급하여 그 계수는 $3y$이다.

또한, 문자 x를 기준으로 하는 경우 xy^3과 $-2x$는 모두 x에 대한 일차항이다. 이와 같이

특정한 한 문자에 대하여 차수가 같은 항을 **동류항**이라 한다.

단원 들어가기

본문 내용을 학습하기에 앞서 이전에 배운 내용 또는 이 단원에서 배우는 학습 내용에 대한 기초가 되는 지식을 정리하여 개념을 더욱 쉽게 이해할 수 있도록 하였습니다.



1 다항식의 덧셈과 곱셈

1. 다항식의 덧셈과 곱셈에 대한 연산법칙

수의 연산에서와 같이 다항식에서도 덧셈과 곱셈에 대하여 교환법칙과 결합법칙이 성립하고, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙도 성립한다.

즉, 다항식 A, B, C에 대하여 다음의 연산법칙이 성립한다.

	덧셈	곱셈
교환법칙	$A+B=B+A$	$AB=BA$
결합법칙	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$
분배법칙	$A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$	

2. 다항식의 덧셈과 뺄셈

두 다항식의 덧셈과 뺄셈은 동류항끼리 모아 계산하여 정리한다.

두 다항식 $A=3x^2+2x+4$, $B=x^2+x+1$에 대하여 $A+B$와 $A-B$는 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned} A+B&=(3x^2+2x+4)+(x^2+x+1)\\ &=(3x^2+x^2)+(2x+x)+(4+1)\\ &=4x^2+3x+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A-B&=(3x^2+2x+4)-(x^2+x+1)\\ &=(3x^2-x^2)+(2x-x)+(4-1)\\ &=2x^2+x+3 \end{aligned}$$

3. 다항식의 곱셈

다항식의 곱셈은 분배법칙과 지수법칙을 이용하여 계산한다. 이때 계산의 결과는 동류항끼리 묶어 정리한다.

$$\begin{aligned} (x^2+2x)(3x+1)&=\underbrace{3x^3}_{①}+\underbrace{x^2}_{②}+\underbrace{6x^2}_{③}+\underbrace{2x}_{④}\\ &=3x^3+7x^2+2x \end{aligned}$$

이와 같이 다항식의 곱셈에서 괄호를 풀어 하나의 다항식으로 나타내는 것을 **전개한다**고 하고, 전개하여 얻은 식을 **전개식**이라 한다.

필수개념 다항식의 덧셈과 곱셈

다항식의 덧셈과 곱셈에 대한 연산법칙

	덧셈	곱셈
교환법칙	$A+B=B+A$	$AB=BA$
결합법칙	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$
분배법칙	$A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$	

다항식의 덧셈과 뺄셈

(1) 각 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(2) 동류항끼리 모아 간단히 정리한다.

다항식의 곱셈

(1) 분배법칙과 지수법칙을 이용하여 전개한다.

(2) 동류항끼리 모아 간단히 정리한다.

PLUS α

A에서 B를 빼는 것은 A에 $-B$를 더하는 것과 같다.

$A-B=A+(-B)$

연구 1 다항식의 덧셈과 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하므로
$(A+B)+C$, $A+(B+C)$는 괄호를 생략하여 $A+B+C$로 나타낼 수 있고,
$(AB)C$, $A(BC)$는 괄호를 생략하여 ABC로 나타낼 수 있다.

연구 2 다항식은 동류항끼리 모아 정리하여 간단히 나타낼 수 있다. 이때 어느 한 문자를 기준으로 차수가 낮아지거나 높아지도록 정리한다.

(1) 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타내는 것을 **내림차순**으로 정리한다고 한다.

(2) 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 나타내는 것을 **오름차순**으로 정리한다고 한다.

개념 확인

세 다항식 $A=x+y$, $B=2x+y$, $C=x-y$에 대하여 $AB-AC$를 계산하여라.

풀이
$$\begin{aligned} AB-AC&=A(B-C)\\ &=(x+y)\{(2x+y)-(x-y)\}\\ &=(x+y)(x+2y)\\ &=x^2+2xy+xy+2y^2\\ &=x^2+3xy+2y^2 \end{aligned}$$

개념 정리

개념에 대한 설명 및 공식, 성질 등을 실례를 들어 구체적으로 자세히 설명하여 쉽고 정확하게 이해할 수 있도록 하였습니다.
또한, 개념 설명과 필수개념이 마주보고 있어 효과적으로 학습할 수 있도록 하였습니다.

필수개념 개념을 한눈에 확인할 수 있도록 정리

PLUS α 개념 이해에 도움이 되는 용어 및 간단한 공식 정리

연구 학습 내용 중 확장, 심화, 통합할 수 있는 내용을 정리

개념 확인 학습한 내용을 바로 확인할 수 있는 문제

필수문제 | 1 다항식의 덧셈과 뺄셈

▶Link P. 13 필수개념

세 다항식 $A=x^2+xy+1$, $B=2xy-2y^2$, $C=xy+y^2$에 대하여 다음을 x에 대한 내림차순으로 정리하여라.

(1) $A+B+C$ (2) $A-(B-C)$

풀이

(1) $A+B+C=x^2+xy+1+2xy-2y^2+xy+y^2$
$=x^2+xy+2xy+xy+1-2y^2+y^2$
$=x^2+4yx-y^2+1$

(2) $A-(B-C)=A-B+C$
$=x^2+xy+1-(2xy-2y^2)+xy+y^2$
$=x^2+xy+1-2xy+2y^2+xy+y^2$
$=x^2+xy-2xy+xy+1+2y^2+y^2$
$=x^2+3y^2+1$

답 (1) $x^2+4yx-y^2+1$ (2) x^2+3y^2+1

필수 문제

실전에 자주 출제되는 문제들을 엄선하여 해결 과정을 제시함으로써
해당 유형에 대한 이해를 확실히 할 수 있도록 하였습니다.

노트 필기

꼭 알아야 할 개념들을 되짚어 주어 실전에 활용할 수 있도록 하였습니다.

유제

필수문제와 유사한 문제로
유형에 대해 반복 학습을 할
수 있도록 제시하였습니다.

노트 필기

다항식의 덧셈, 뺄셈은 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

정답 및 해설 P 2

유제 1-1

두 다항식 $A=x^2+2x+3$, $B=x^2-x+1$에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $2A-B$ (2) $(2A-B)-(A-2B)$

유제 1-2

세 다항식 $A=x^2+2xy$, $B=y^2-xy+3$, $C=-x^2+xy-6$에 대하여
$A-\{B-(C-A)\}$를 x에 대한 내림차순으로 정리하여라.

연습 문제

중단원별로 학습한 내용을
난이도별(개념, 실력, 심화)로 구성하여
연산 능력 및 통합적 사고력을
향상시킬 수 있도록 하였습니다.

연 습 문 제

실력 완성

06 두 다항식 A, B에 대하여 $A+B=x^3+6x^2+5$, $A-B=3x^3-2x+3$일 때, $A+2B$를 간단히 정리한 것은?

① x^3-3x^2-2 ② $2x^2-3x+6$ ③ $3x^2+2x+1$
④ $6x^2-3x+2$ ⑤ $9x^2+x+6$

07 다항식 $(x^2+ax+2)(x^2+bx+2)$의 전개식에서 x^3과 x^2의 계수가 모두 0일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

특강

교과서에는 자세히 다루지는 않지만 실전에 꼭
필요한 개념들을 별도로 모아 학생들의 실력을
한 단계 더 업그레이드 할 수 있도록 하였습니다.

Topic

특강에서 학습한 개념을 요약 정리하였고 문제를
통해 이해를 극대화할 수 있도록 하였습니다.

특강

PRINCIPLES OF MATH

다항식 $a^3+b^3+c^3$의 변형

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$임을 이용하여 $a^3+b^3+c^3-3abc$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc \\ &= (a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\} \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \end{aligned}$$

이때 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$를 변형하면

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \end{aligned}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \end{aligned}$$

한편, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$이면 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉 $a=b=c$이므로

Topic 1 다항식 $a^3+b^3+c^3$의 변형 정답 및 해설 P 67

세 실수 a, b, c에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$\qquad=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

(2) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

(3) $a^3+b^3+c^3=3abc$이면 $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$이다.

Topic 1-1 세 실수 a, b, c에 대하여 $a^3+b^3+c^3=3abc$일 때, **〈보기〉**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $a+b+c=0$이면 $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$이다.
ㄴ. $a+b+c\neq 0$이면 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$이다.
ㄷ. a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Topic 1-2 세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=7$, $a^3+b^3+c^3=15$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $ab+bc+ca$ (2) abc

이 책의 차례

Ⅲ 도형의 방정식

부 록

특강

Ⅰ 다항식

01 다항식의 연산

다음 식을 통해 다항식에서 사용하는 용어의 뜻을 알아보자.

$$2x^3+3x^2-4x+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(1) $2x^3$, $3x^2$, $-4x$, 1과 같이 몇 개의 문자 또는 수의 곱으로 이루어진 식을 **단항식**이라 하고, ㉠과 같이 단항식의 합으로 이루어진 식을 **다항식**이라 한다.

(2) 다항식을 이루고 있는 각각의 단항식을 이 다항식의 **항**이라 하고, 특히 상수로만 이루어진 항을 **상수항**이라 한다.

(3) 다항식의 각 항에서 문자가 곱해진 횟수를 그 **항의 차수**라 하고, 각 항의 차수 중 가장 높은 것을 **다항식의 차수**라 한다.

(4) 다항식의 각 항에서 문자를 제외한 나머지 부분을 그 **항의 계수**라 한다.

$$2x^3+3x^2-4x+1$$

상수항
일차항(계수 : -4)
이차항(계수 : 3)
삼차항(계수 : 2)

한편, 두 문자 x, y로 이루어진 다항식

$$3x^2y+xy^3-2x+4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

에서 $3x^2y$는 x가 두 번 곱해져 있고, y가 한 번 곱해져 있으므로 두 문자 x, y에 대한 삼차식이고, 문자 x, y를 제외한 숫자 3이 곱해져 있으므로 계수는 3이다.

그러나 $3x^2y$를 문자 x를 기준으로 분석하면

x에 대한 이차식이고, y는 상수로 취급하여 그 계수는 $3y$이다.

또한, 문자 x를 기준으로 하는 경우 xy^3과 $-2x$는 모두 x에 대한 일차항이다. 이와 같이

특정한 한 문자에 대하여 차수가 같은 항을 **동류항**이라 한다.

단항식도 다항식에 포함하여 생각한다. 즉, 단항식은 항이 1개인 다항식이다.

1 다항식의 덧셈과 곱셈

1. 다항식의 덧셈과 곱셈에 대한 연산법칙

수의 연산에서와 같이 다항식에서도 덧셈과 곱셈에 대하여 교환법칙과 결합법칙이 성립하고, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙도 성립한다.

즉, 다항식 A, B, C에 대하여 다음의 연산법칙이 성립한다.

	덧셈	곱셈
교환법칙	$A+B=B+A$	$AB=BA$
결합법칙	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$
분배법칙	$A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$	

2. 다항식의 덧셈과 뺄셈

두 다항식의 덧셈과 뺄셈은 동류항끼리 모아 계산하여 정리한다.

두 다항식 $A=3x^2+2x+4$, $B=x^2+x+1$에 대하여 $A+B$와 $A-B$는 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned}A+B&=(3x^2+2x+4)+(x^2+x+1)\\&=(3x^2+x^2)+(2x+x)+(4+1)\\&=4x^2+3x+5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A-B&=(3x^2+2x+4)-(x^2+x+1)\\&=(3x^2-x^2)+(2x-x)+(4-1)\\&=2x^2+x+3\end{aligned}$$

3. 다항식의 곱셈

다항식의 곱셈은 분배법칙과 지수법칙을 이용하여 계산한다. 이때 계산의 결과는 동류항끼리 묶어 정리한다.

$$\begin{aligned}(x^2+2x)(3x+1)&=\underset{①}{\underline{3x^3}}+\underset{②}{\underline{x^2}}+\underset{③}{\underline{6x^2}}+\underset{④}{\underline{2x}}\\&=3x^3+7x^2+2x\end{aligned}$$

이와 같이 다항식의 곱셈에서 괄호를 풀어 하나의 다항식으로 나타내는 것을 **전개한다**고 하고, 전개하여 얻은 식을 **전개식**이라 한다.

필수개념 다항식의 덧셈과 곱셈

다항식의 덧셈과 곱셈에 대한 연산법칙

	덧셈	곱셈
교환법칙	$A+B=B+A$	$AB=BA$
결합법칙	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$
분배법칙	$A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$	

다항식의 덧셈과 뺄셈

(1) 각 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(2) 동류항끼리 모아 간단히 정리한다.

다항식의 곱셈

(1) 분배법칙과 지수법칙을 이용하여 전개한다.

(2) 동류항끼리 모아 간단히 정리한다.

PLUS α

A에서 B를 빼는 것은 A에 $-B$를 더하는 것과 같다.

$A-B=A+(-B)$

연구 1 다항식의 덧셈과 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하므로
$(A+B)+C$, $A+(B+C)$는 괄호를 생략하여 $A+B+C$로 나타낼 수 있고,
$(AB)C$, $A(BC)$는 괄호를 생략하여 ABC로 나타낼 수 있다.

연구 2 다항식은 동류항끼리 모아 정리하여 간단히 나타낼 수 있다. 이때 어느 한 문자를 기준으로 차수가 낮아지거나 높아지도록 정리한다.

(1) 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타내는 것을 **내림차순**으로 정리한다고 한다.

(2) 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 나타내는 것을 **오름차순**으로 정리한다고 한다.

개념 확인

세 다항식 $A=x+y$, $B=2x+y$, $C=x-y$에 대하여 $AB-AC$를 계산하여라.

풀이
$$\begin{aligned} AB-AC &= A(B-C) \\ &= (x+y)\{(2x+y)-(x-y)\} \\ &= (x+y)(x+2y) \\ &= x^2+2xy+xy+2y^2 \\ &= x^2+3xy+2y^2 \end{aligned}$$

2 곱셈 공식과 그 변형

다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 전개한다. 이때 특별한 형태의 다항식은 공식을 이용하여 전개하면 편리하다.

우선 중학교에서 배운 곱셈 공식은 다음과 같다.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

이번에는 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 이용하여 $(a+b)^3$, $(a-b)^3$을 전개해 보자.

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)^2(a+b)\\&=(a^2+2ab+b^2)(a+b)\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^3&=(a-b)^2(a-b)\\&=(a^2-2ab+b^2)(a-b)\\&=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

이때 ㉠, ㉡을 비교하면

$(a-b)^3$의 전개식은 $(a+b)^3$의 전개식에서 b 대신 $-b$를 대입한 것과 같음

을 알 수 있다. 따라서 곱셈 공식을 이용할 때에는 식의 형태에 주목하여 적용하도록 한다.

한편, 곱셈 공식 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$에서 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$이므로

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

이다. 이때

$a+b$, ab의 값을 알면 a, b의 값을 직접 구하지 않아도 a^3+b^3의 값을 구할 수 있다.

즉, 곱셈 공식을 변형하면 주어진 식의 값을 쉽게 구할 수 있다.

필수개념 **곱셈 공식과 그 변형**

곱셈 공식

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(4) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(5) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

곱셈 공식의 변형

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

(3) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(4) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

PLUS α

곱셈 공식은 식의 형태에 주목하여 적용하도록 한다.

연구 1 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$을 이용하여 $(a+b+c)^2$을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=\{(a+b)+c\}^2\\&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\&=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\end{aligned}$$

개념 확인

곱셈 공식을 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+2b)^3$

(2) $(a+b+2c)^2$

풀이 (1) $(a+2b)^3=a^3+3\times a^2\times 2b+3\times a\times(2b)^2+(2b)^3$
$=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$

(2) $(a+b+2c)^2=a^2+b^2+(2c)^2+2\times a\times b+2\times b\times 2c+2\times 2c\times a$
$=a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc+4ca$

3 다항식의 나눗셈과 조립제법

1. 다항식의 나눗셈

오른쪽 그림은 자연수 1375를 3으로 나눈 몫과 나머지를 구하는 과정이다.
이때 자연수 1375는 몫과 나머지를 이용하여

$$\mathbf{1375=3\times 458+1}$$

과 같이 나타낼 수 있다. 또한, 자연수를 3으로 나눈 나머지는 반드시 0, 1, 2 중 하나이다.

$$\begin{array}{rrl}
 & 458 & \leftarrow \text{몫} \\
3 \big) & \overline{1375} & \\
 & 12 & \\
\cline{2-2}
 & 175 & \\
 & 15 & \\
\cline{2-2}
 & 25 & \\
 & 24 & \\
\cline{2-2}
 & 1 & \leftarrow \text{나머지}
\end{array}$$

다항식의 나눗셈도 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산하여 몫과 나머지를 구한다.

다만, 자연수의 나눗셈에서 자릿수를 맞추어 계산하듯이 다항식의 나눗셈에서는 차수를 맞추어 계산한다. 이때 항이 없는 차수는 그 계수를 '0'으로 하여 계산한다.

또한, 자연수의 나눗셈에서 나머지가 나누는 수보다 작듯이

다항식의 나눗셈에서는 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 낮아야 한다.

따라서 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 낮을 때까지 나눈다.

예를 들어, $(3x^3+x^2+1)\div(x^2+x+1)$은 오른쪽과 같이 계산한다.

$$\begin{array}{rl}
 & 3x-2 \\
x^2+x+1 \big) & \overline{3x^3+x^2+0x+1} \\
 & 3x^3+3x^2+3x \\
\cline{2-2}
 & -2x^2-3x+1 \\
 & -2x^2-2x-2 \\
\cline{2-2}
 & -x+3
\end{array}$$

이때 나눗셈의 결과를 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{3x^3+x^2+1=(x^2+x+1)\underbrace{(3x-2)}_{\text{몫}}\underbrace{-x+3}_{\text{나머지}}}$$

위의 결과에서 다항식 $3x^3+x^2+1$을 이차식 x^2+x+1로 나눈 나머지는 x^2+x+1보다 차수가 낮은 일차식 $-x+3$임을 확인할 수 있다.